§4.3 解析函数的幂级数展式

一、Taylor展开定理

Thm. 设$f(z)$在区域D上解析，$a\in D$，记$K: |z-a|<R$且$K\subset D$，

则$f(z)$在K内可展成$z-a$的幂级数：$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Pf. 任取$z\in K$，以$z=a$为圆心作$\Gamma_\rho: |\xi-a|=\rho<R$且$|z-a|<\rho$

由柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-a\cdot\frac{\xi-z}{\xi-a}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n d\xi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right]\cdot(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Def. 上式称为$f(z)$在$z=a$的泰勒级数，其系数$C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$称为泰勒系数.

Cor1. 若$f(z)$在$z=a$展成$z-a$的幂级数：$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$

则$C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，即展式唯一.

Pf. 若$f(z)$在$z=a$邻域内展成$z-a$的形式，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$，

取$\Gamma_\rho: |z-a|=\rho$（ρ很小使Γ_ρ含在其中）

由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$内闭一致收敛，

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}=\frac{C_0}{(z-a)^{n+1}}+\frac{C_1}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{C_n}{z-a}+C_{n+1}+\cdots$$

两边积分有：

$$\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=C_n\cdot 2\pi i,\quad C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Cor 2. 解析的充要条件

$f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 D 内任一点 a 的邻域 ~~可~~ 展成 $z-a$ 的幂级数

Pf. $\Rightarrow$：Taylor 定理

$\Leftarrow$：幂级数的和函数解析.

二. 常见函数的 Taylor 展式

1. $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<+\infty$

2. $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z|<1$

3. $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z|<+\infty$

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<+\infty$.

4. $\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, $|z|<1$

5. $(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n$, $|z|<1$

Rem. 4. 5. 均取主值支.

例1 将 $f(z)=e^z\sin z$ 展成 z 的幂级数

Sol. $f(z) = e^z\sin z = e^z\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)$

$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^n$, $|z|<+\infty$

例2 将 $f(z) = e^z(\cancel{\sin}\,\cos z + i\,\cancel{\cos}\,\sin z)$ 展成 z 的幂级数

Sol. $f(z) = e^z\cdot e^{iz} = e^{(1+i)z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n e^{i\frac{\pi}{4}n}}{n!}z^n$, $|z|<+\infty$

例3 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展成z的幂级数

Sol. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\quad |z|<1.$$